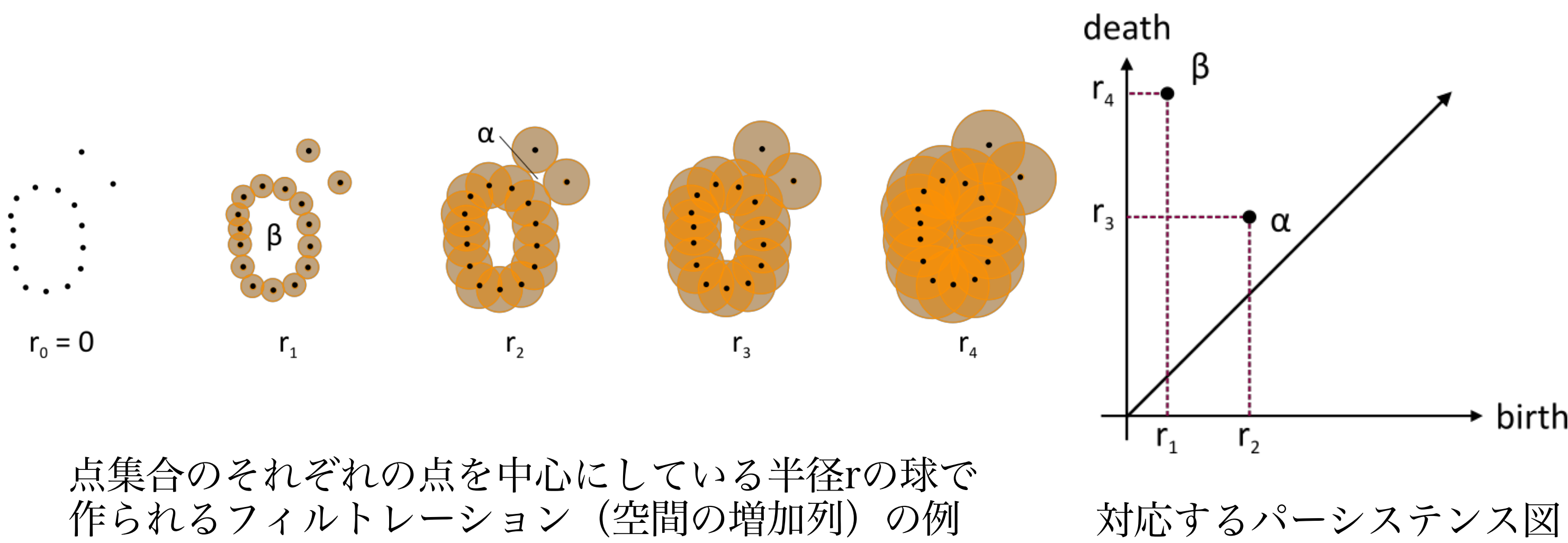


導入

近年、位相的データ解析 (TDA) の研究は急速的に広まっている。本稿、TDAの代表的な手法、「**パーシステントホモロジー(PH)**」に着目する。PHは**パーシステンス図(PD)**で表示され、マルチスケールかつ位相的な特徴 (穴) の「生成 (birth)」と「消滅 (death)」を要約できる。

パーシステントホモロジーの概要



- birth: その穴を取り囲む点群の密度の情報
- death: 穴の大きさの情報
- パーシステンス図は次数ごとに定義
- 材料科学などに応用

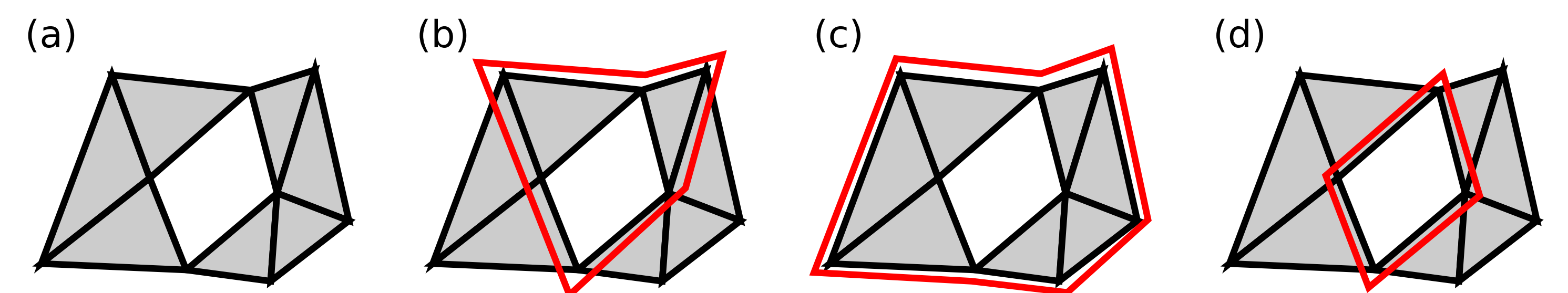
次数	穴の種類
0	連結成分
1	穴
2	空洞

代数的な観点

- パーシステンス図 = 1次元パーシステンス加群の直既約分解
- 直既約1次元パーシステンス加群 = 区間表現 (b,d) (bはbirth、dはdeath)

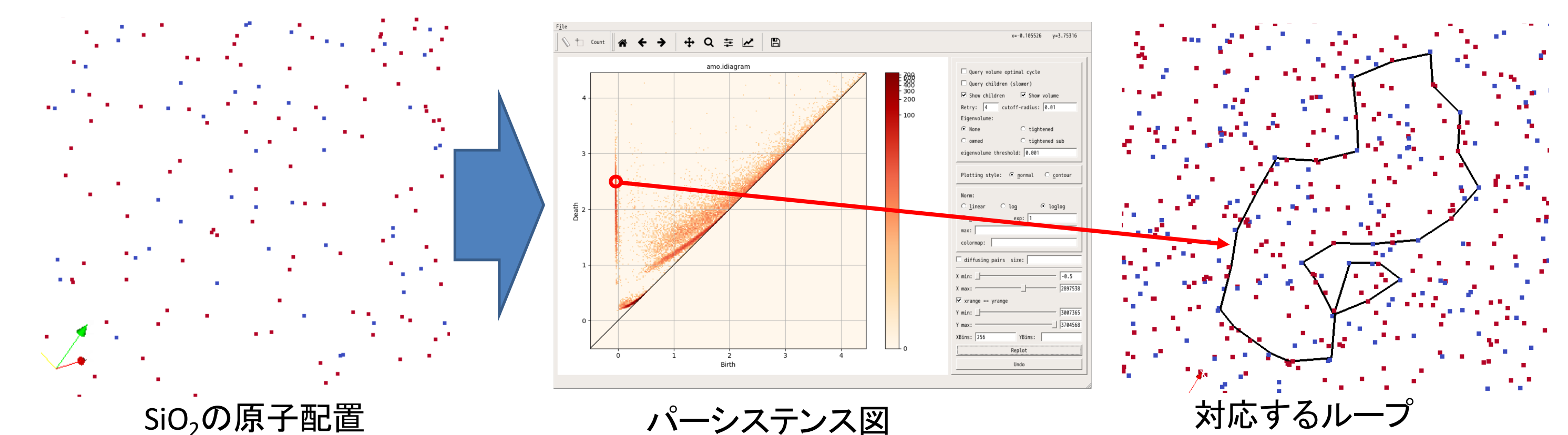
背景

PDの各点は連結成分、穴、空洞といった構造に対応しており、PDを用いたデータ解析のためには**点に対応した構造を特定**できると有用である。しかしそれは簡単ではない。穴はそれを囲うループで特徴付けられるが、下図の(b)(c)(d)は理論上同一視される！解決策として**ホモロジー代数における最適化問題**というアイデアがある。



結果

- PHに適した最小化問題で定式化、線形計画法で計算
- Alexander双対による特別な場合の高速化
 - 先行研究の数学的な意味付けを明確化し一般化
- HomCloud (PHによるデータ解析ソフト) に実装
- 機械学習との組み合わせ



HomCloud: https://www.wpi-aimr.tohoku.ac.jp/hiraoka_lab/homcloud/
<https://doi.org/10.1137/17M1159439> (大林 一平)

背景

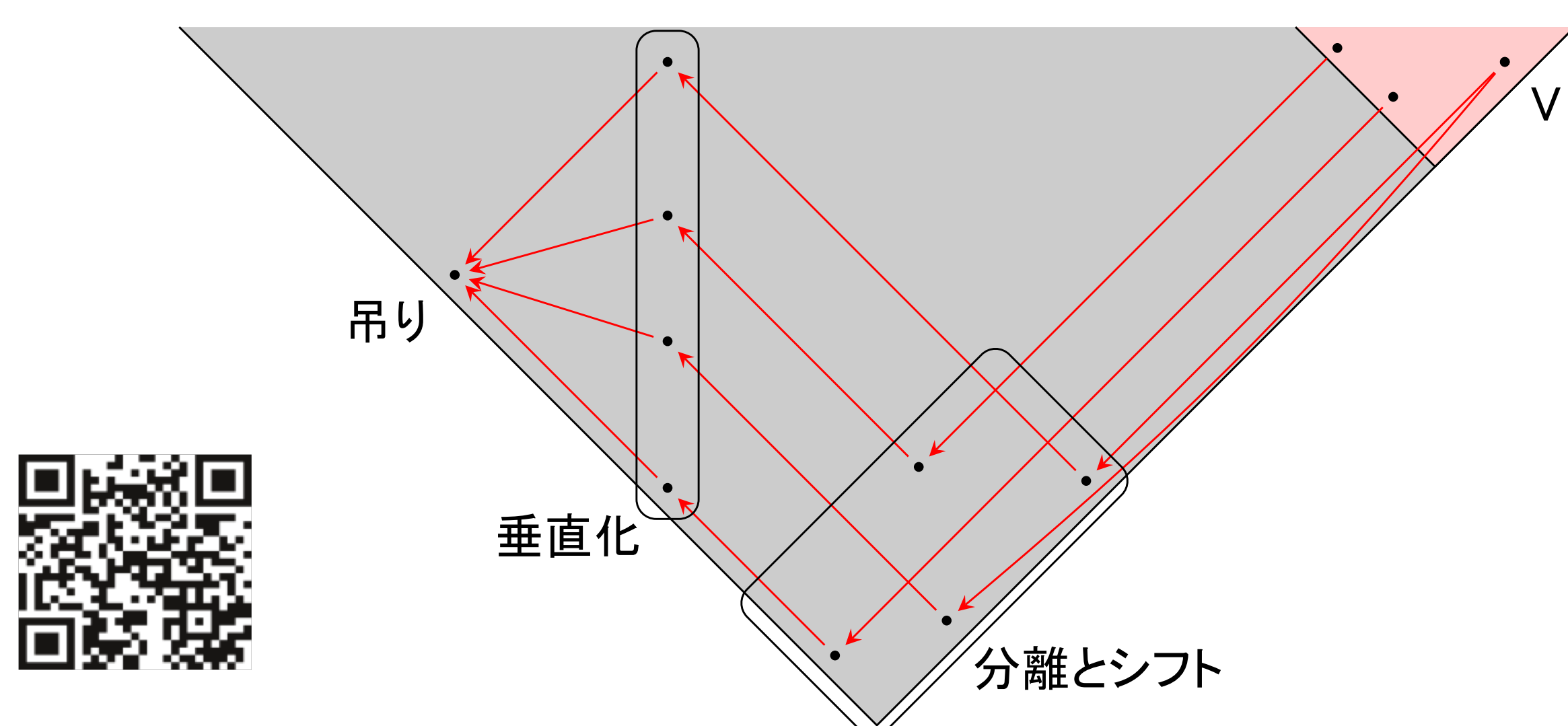
- 直既約加群は一般の加群を構成するもので、その構造解明が重要
- 一方、Lesnick氏とWright氏の提案: 2次元パーシステンス加群を記述するために、全ての直線による制限を調べる

結果

任意の1次元パーシステンス加群は、ある直既約2次元パーシステンス加群の直線による制限として得られる。

証明

1次元パーシステンス加群 V に対する、上で保証した直既約2次元パーシステンス加群の構成法:



意味

1. 直既約2次元パーシステンス加群の難点:
 - その全体が全ての1次元パーシステンス加群を含んでいる
2. Lesnick氏とWright氏の手法:
 - 一つではなく、全ての直線を考えることに意味がある

<https://arxiv.org/abs/1902.07405> (エスカラ エマソン)

背景

- 一般に多次元パーシステンス加群は1次元のものと違って、
- パーシステンス図を構成する**離散的完全不変量は存在しない**
- 直既約加群は**区間表現とは限らない**

解決策: 区間表現分解可能な多次元パーシステンス加群を取り扱う

結果 1

区間表現、前区間表現、細表現を導入し、矢印が同じ向きの2次元可換格子筋上ではそれらが一致する。

結果 2

- $S = \{\text{区間表現}\} / \text{同型}$
- $d_V(L)$: V の直既約分解における L の重複度

$$\text{“表現 } V \text{ が区間表現分解可能”} \iff \dim V = \sum_{L \in S} d_V(L) \dim L$$

[arXiv:1812.05261]



結果の意義

1. 結果 1:
 - 区間表現とその周辺概念の代数的整備
2. 結果 2:
 - Dey氏とXin氏による、区間表現分解可能性を判定する方法の有無についての質問に対する解答

2次元可換格子筋上の区間表現

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & K & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & K & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & K & \rightarrow & K \rightarrow 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & K \rightarrow K \end{array}$$

(吉脇 理雄)