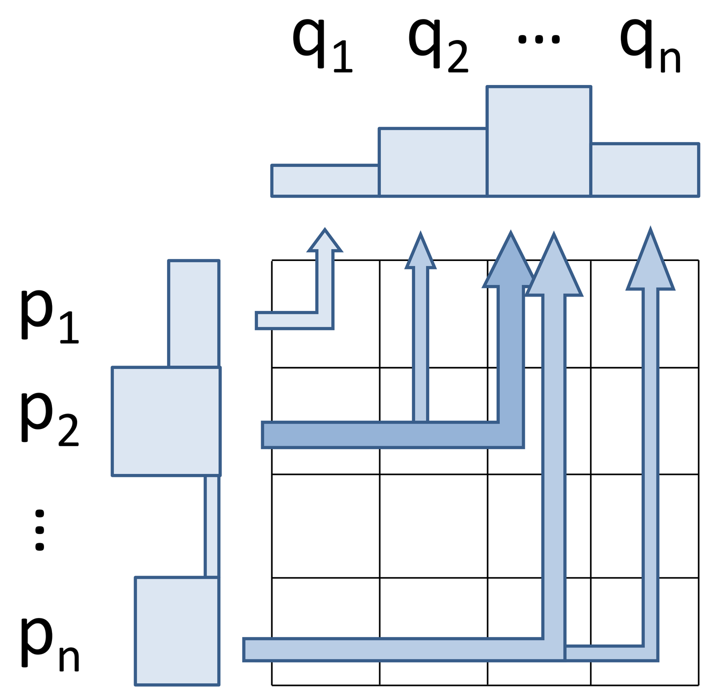
数理解析チーム　　　　　　太田 慎一

Mathematical Analysis Team

Shin-ichi Ohta

Wasserstein重心と情報幾何学　筒井大二

最適輸送問題: 資源を目的地に輸送する際のコスト最小化



- $p=(p_1,\dots,p_n)$: 資源の分布
- $q=(q_1,\dots,q_n)$: 目的分布
- $M=(M_{ij})$: (i,j)間の輸送コスト
  e.g. $M_{ij}=|i-j|^2$

P_{ij} := (i から jへの輸送量)

$\Rightarrow$ Minimize (総コスト) $= \Sigma_{ij} M_{ij}P_{ij}$
under $\Sigma_j P_{ij} = p_i,\ \Sigma_i P_{ij} = q_j$

エントロピー緩和 (M. Cuturi, 2013)

$C_\lambda(p,q) := \min\ \Sigma_{ij} M_{ij}P_{ij} - \lambda H(P)$　under $\Sigma_j P_{ij} = p_i,\ \Sigma_i P_{ij} = q_j,$

$\lambda > 0,\ H(P) := -\Sigma_{ij} P_{ij} \log P_{ij}$: Shannonエントロピー

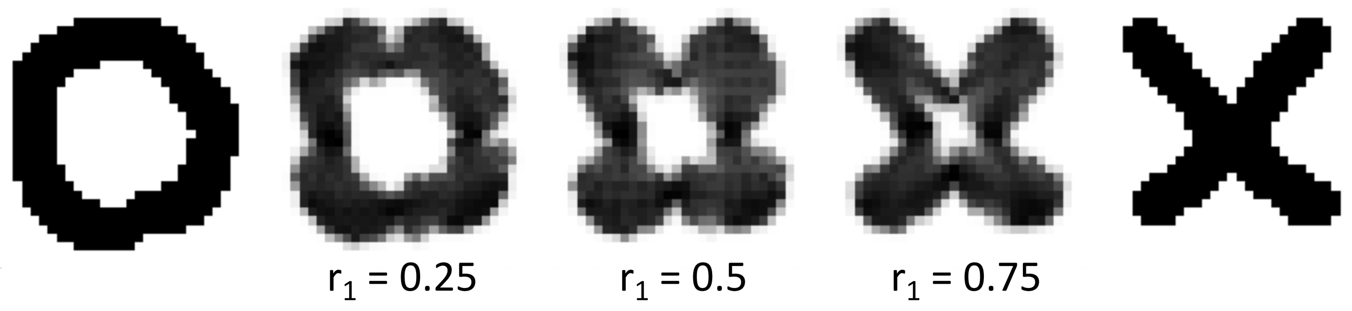
C_λを緩和されたWasserstein距離とよぶ(注: λ>0で一般に距離を定めない).

- 最適解を小さな計算コストで得られる(Sinkhornアルゴリズム)
- Sinkhornアルゴリズム = e-射影の反復 (Amari et al., 2018)
  → 情報幾何的に自然

重心問題: Wasserstein距離C_λに関する重み付き重心

Minimize　$\Sigma_k r_k C_\lambda(p^k,q)$　w.r.t. q

for given $p^1,\dots,p^N,\ r_1,\dots,r_N$, with $\Sigma_k r_k = 1$



- 高速に計算するアルゴリズム (Benamou et al., 2015)
- 再びe-射影の反復 → **情報幾何からの一般化が可能**

一般化エントロピー緩和

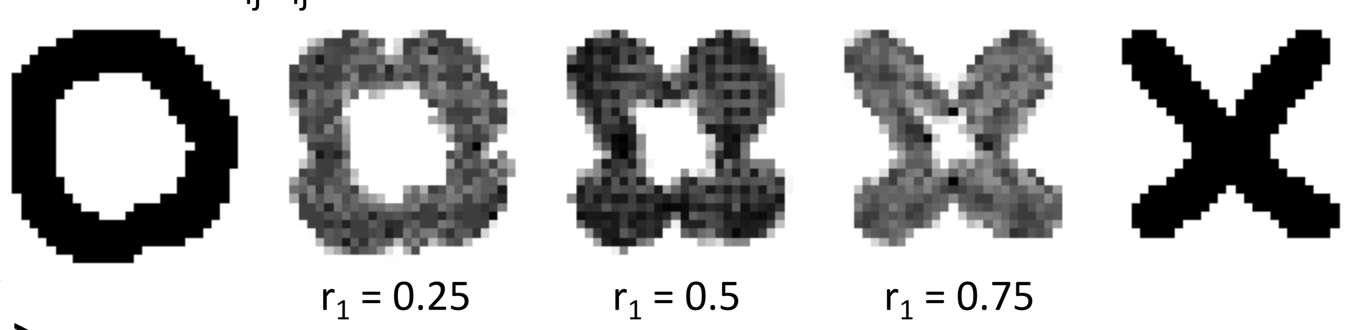
$C^\Phi_\lambda(p,q) := \min\ \Sigma_{ij} M_{ij}P_{ij} + \Phi(P)$　under $\Sigma_j P_{ij} = p_i,\ \Sigma_i P_{ij} = q_j,$

$\Phi(P)$: 一般の狭義凸関数

Cuturiの緩和では
- λ: 大 ⇒ 得られる最適解がぼやける
- λ: 小 ⇒ 数値的に不安定

⇒ より良い Φ によって改善できないか

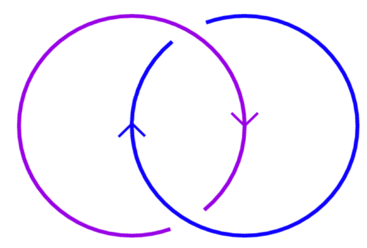
例: $\Phi := 100\ \Sigma_{ij} P_{ij}^2$とした場合の重み付き重心



<成果>
一般の凸関数に対する最適輸送問題のエントロピー緩和と重心問題を考察し，特に二乗ノルムによる緩和に対し，重心の計算アルゴリズムを与えた.

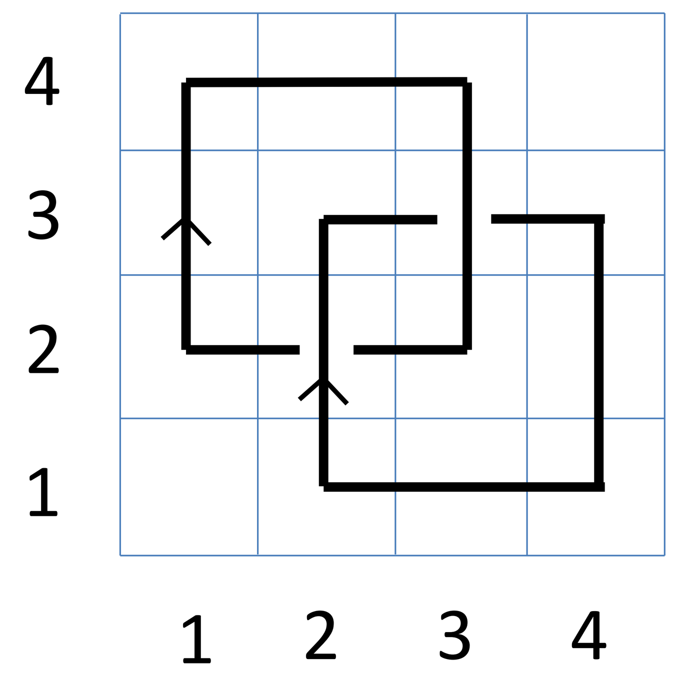
ランダムグリッド絡み目の絡み数　小鳥居祐香

絡み目＝複数の輪っかが絡まったもの



絡み目は平面に射影することにより2次元的に表すことができる.
これを<u>絡み目図式</u>とぶ.

グリッド図式

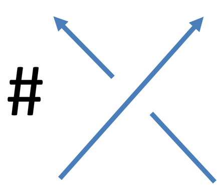
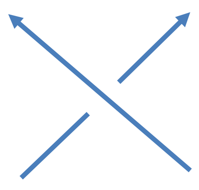


オーダー4のグリッド図式

オーダーnのグリッド図式とは次のルールで構成される結び目図式である
- n個のタテの線分，n個のヨコの線分からなる
- タテの線分は必ずヨコの線分の上を通る

<u>定理</u>
- 任意の絡み目はグリッド図式で表せる.
- オーダーnのグリッド図式は2つの{1, …n}の置換により定まる.

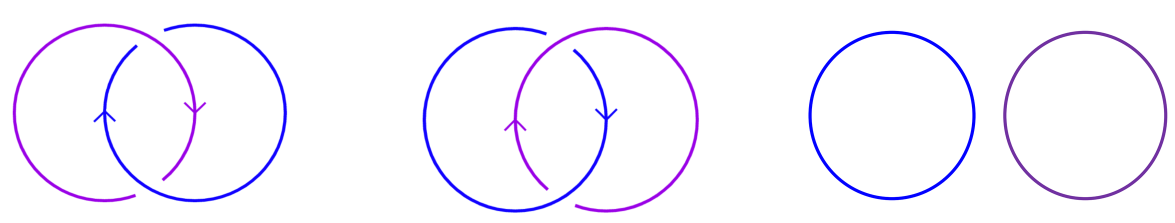
絡み数Lk＝絡み目の絡み度合いを測る量

$Lk = \frac{1}{2}$ (#  - # )

ランダム絡み目＝絡み目をランダムに構成したときの確率的な振る舞い

<定義>
グリッド図式を用いたランダム絡み目(ランダムグリッド絡み目)を，グリッド図式を表す2つの置換をそれぞれ一様ランダムにとることで定義した.

Ex.
オーダー4の
ランダムグリッド
絡み目



確率 $\frac{1}{18}$　　確率 $\frac{1}{18}$　　確率 $\frac{8}{9}$

<成果>
ランダムグリッド絡み目の絡み数のモーメントがグリッド図式のオーダーに関する多項式になる．さらに，多項式の次数はモーメントの次数以下となる．特に偶数次モーメントの場合，0になる.