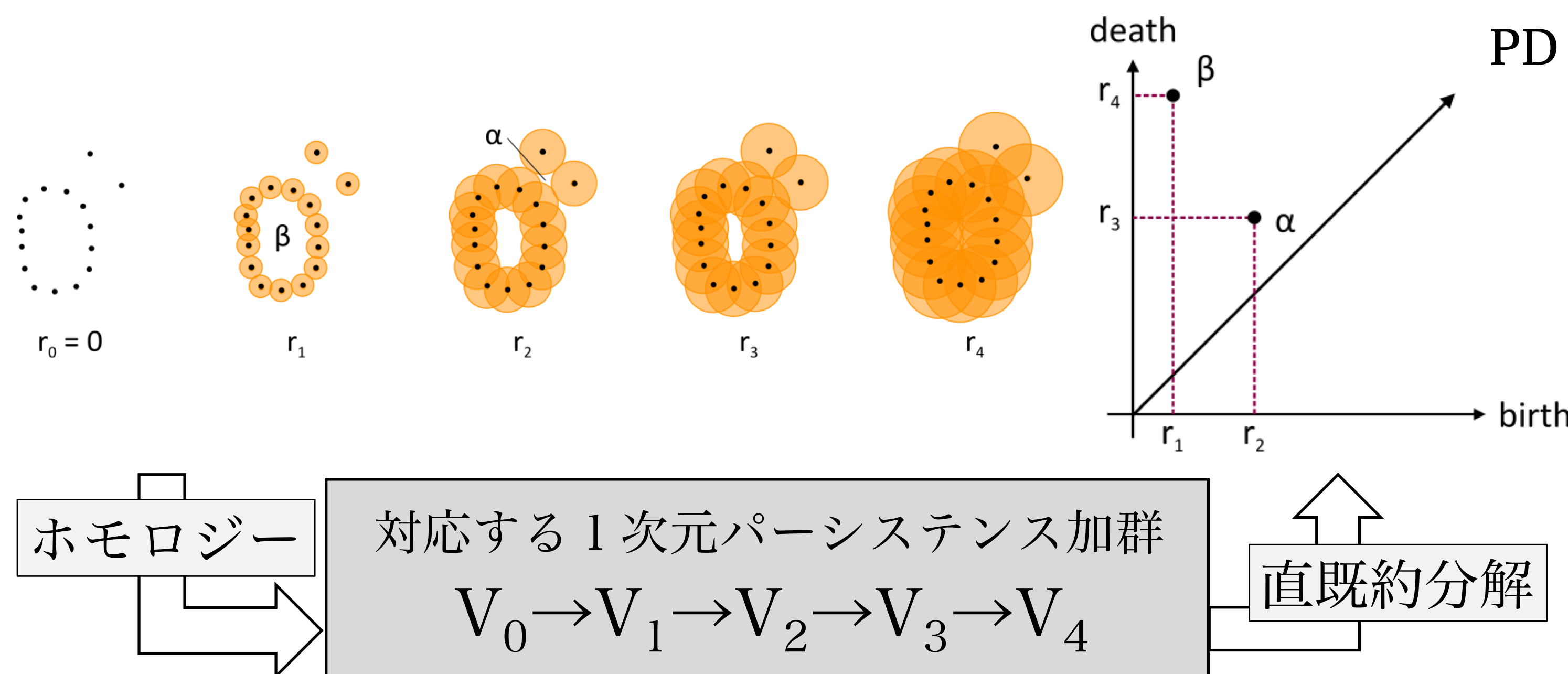


パーシステントホモロジーの概要



多次元パーシステンスに対する普遍性定理

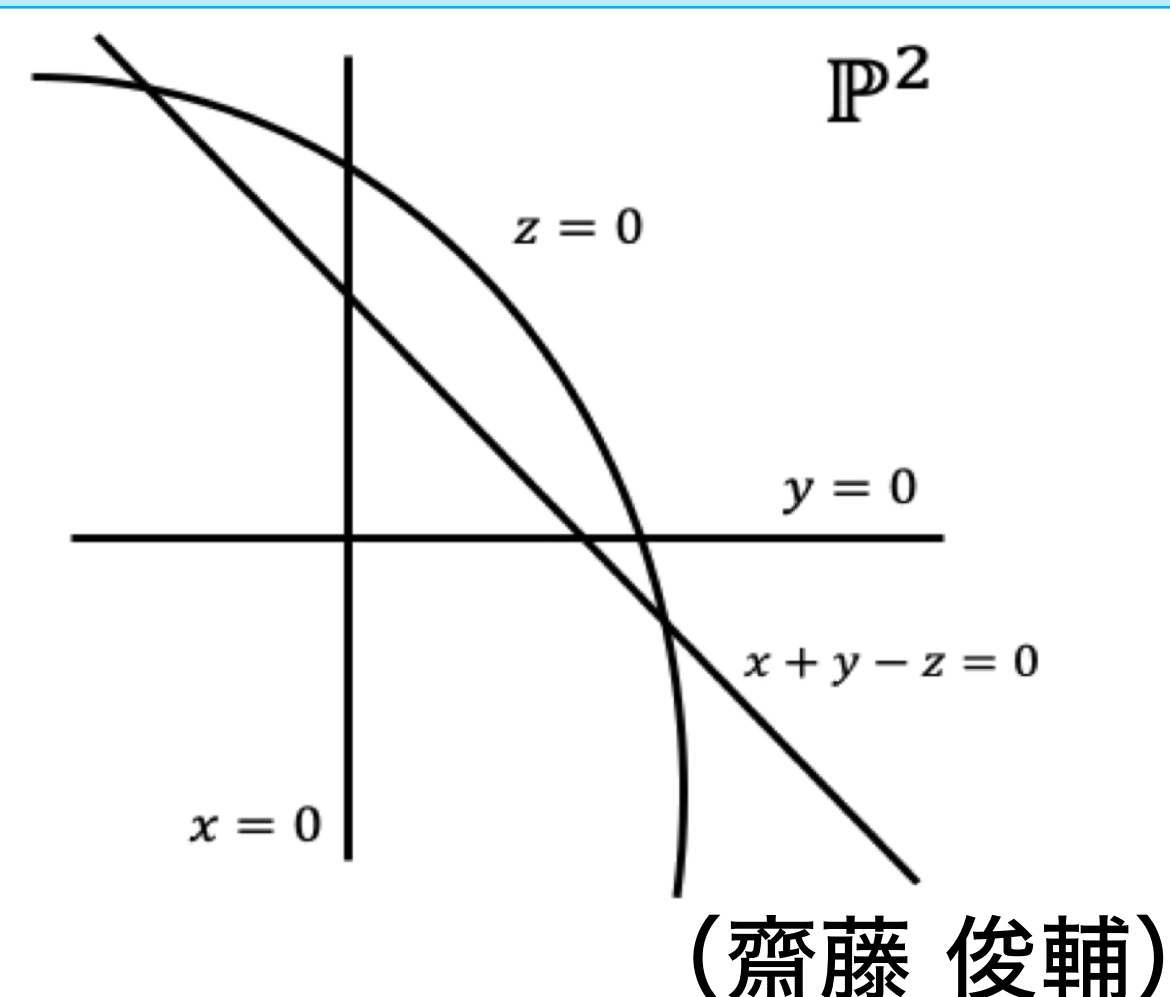
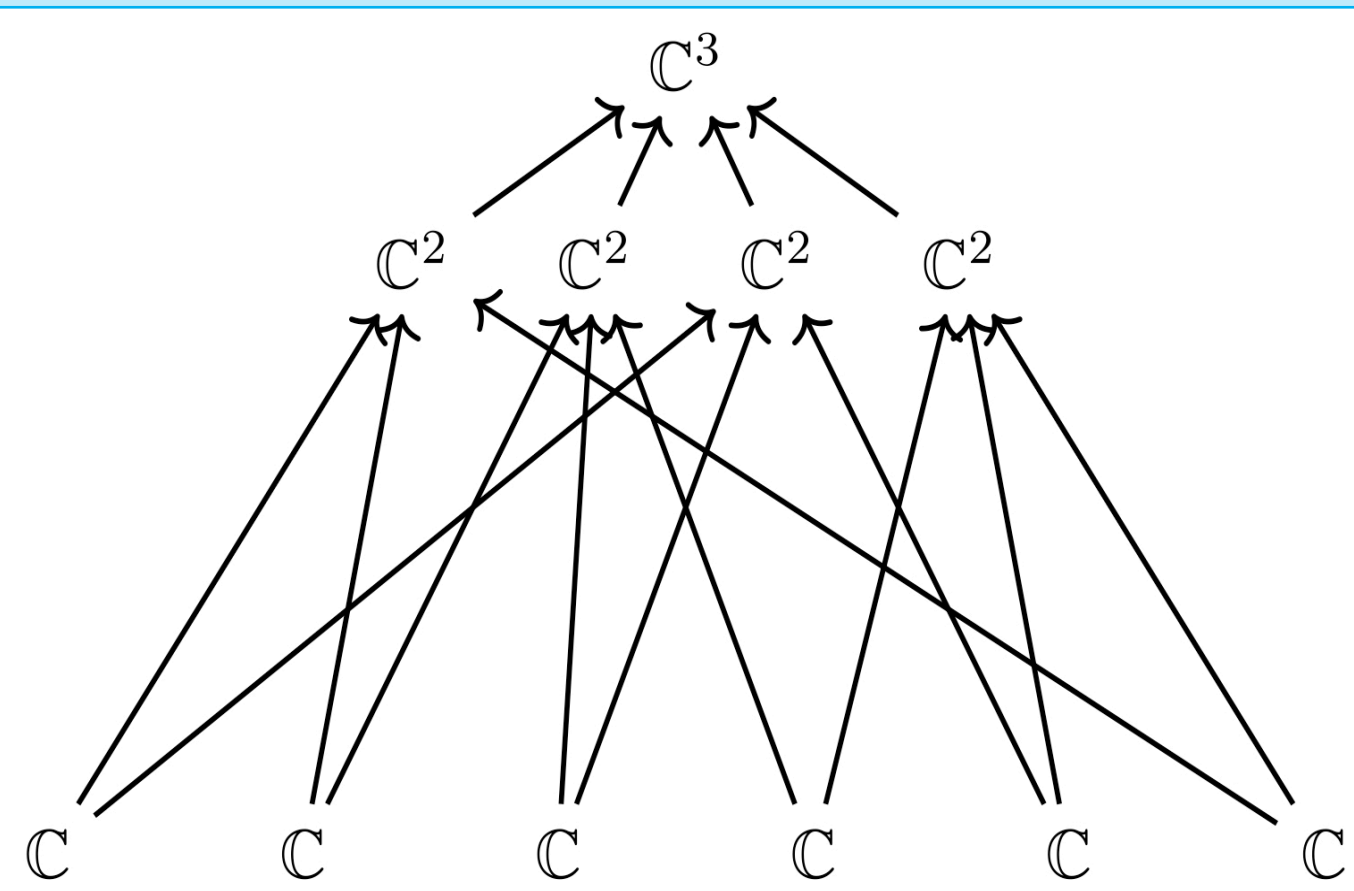
平岡 裕章, 吉永 正彦, 齋藤 俊輔, 吉脇 理雄

背景

1次元の場合とは異なり, 多次元パーシステンスにはそのままではPDのような端的な表示がない. これは構造の代数的な複雑さを表している. ではこの複雑さを幾何学的に捉えられないか?

結果

$\mathbb{Z}$ 上のアファイン代数的集合は多次元パーシステンス加群の同型類として実現できる.



区間分解近似

浅芝 秀人, Emerson G. Escobar, 中島 健, 吉脇 理雄 [arXiv:1911.01637]

背景

- 多次元パーシステンスに対して, 実用上区間表現だけで情報が取り出せる可能性がある (例えば, Escobar-平岡[2016]).
- 2次元の区間表現は[arXiv:1812.05261]で詳しく研究を行った.

結果

2次元パーシステンス加群Mに対して, 区間分解近似 $\partial(M)$ を定義.

- Mが区間分解可能ならば, $M = \partial(M)$ が成り立つ.
- Mと $\partial(M)$ で次元ベクトル, ランク不変量は一致する.

導来圏版安定性定理

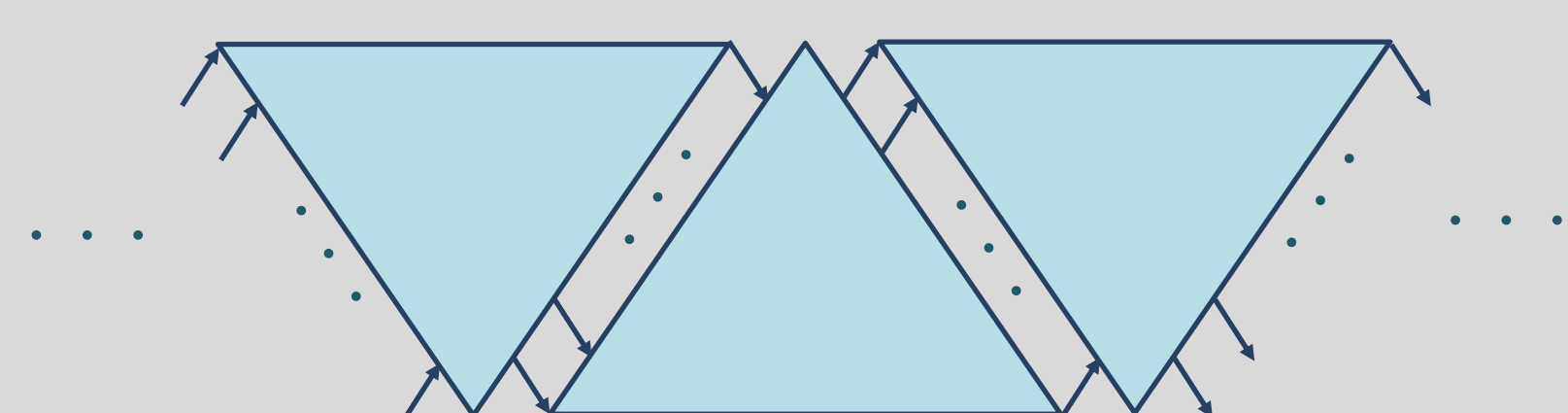
平岡 裕章, 吉脇 理雄

背景

- 導来圏を用いて, 考える対象を取り替えることができる.

導来圏のパーシステンス図

1次元パーシステンス加群の場合は右図



結果

1次元パーシステンス加群の導来圏で次のノイズ安定性が成り立つ.

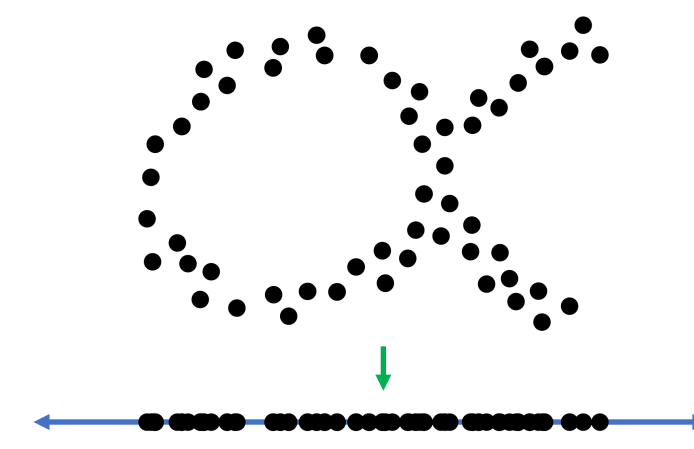
$$d_B^D(\text{PD}(X), \text{PD}(Y)) \leq d_I^D(X, Y).$$

(吉脇 理雄)

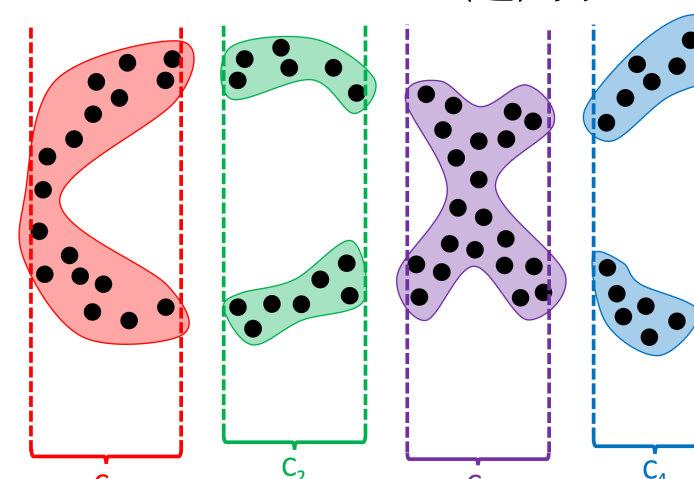
Mapperの概要

Mapper は複雑なデータに内在する, ループや枝分かれといった構造をグラフで可視化できる.

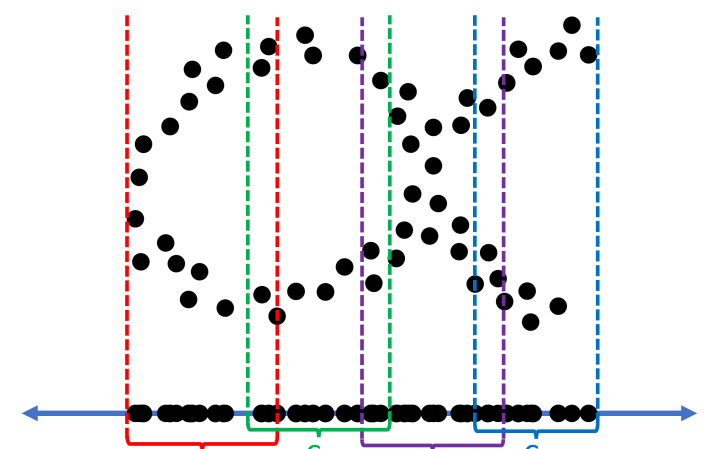
ステップ1:
フィルター関数を選ぶ



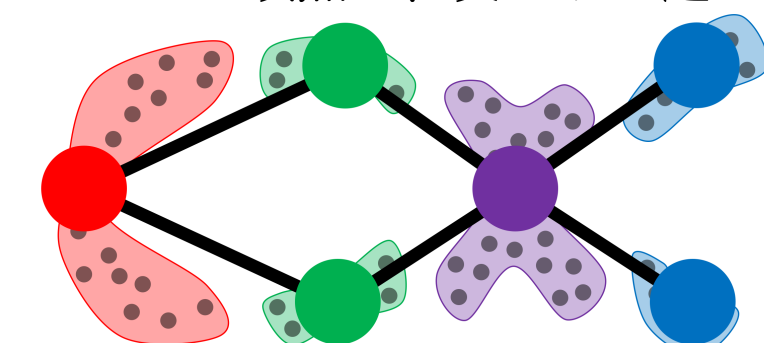
ステップ3:
逆像にクラスタリングを適用する



ステップ2:
イメージを被覆する

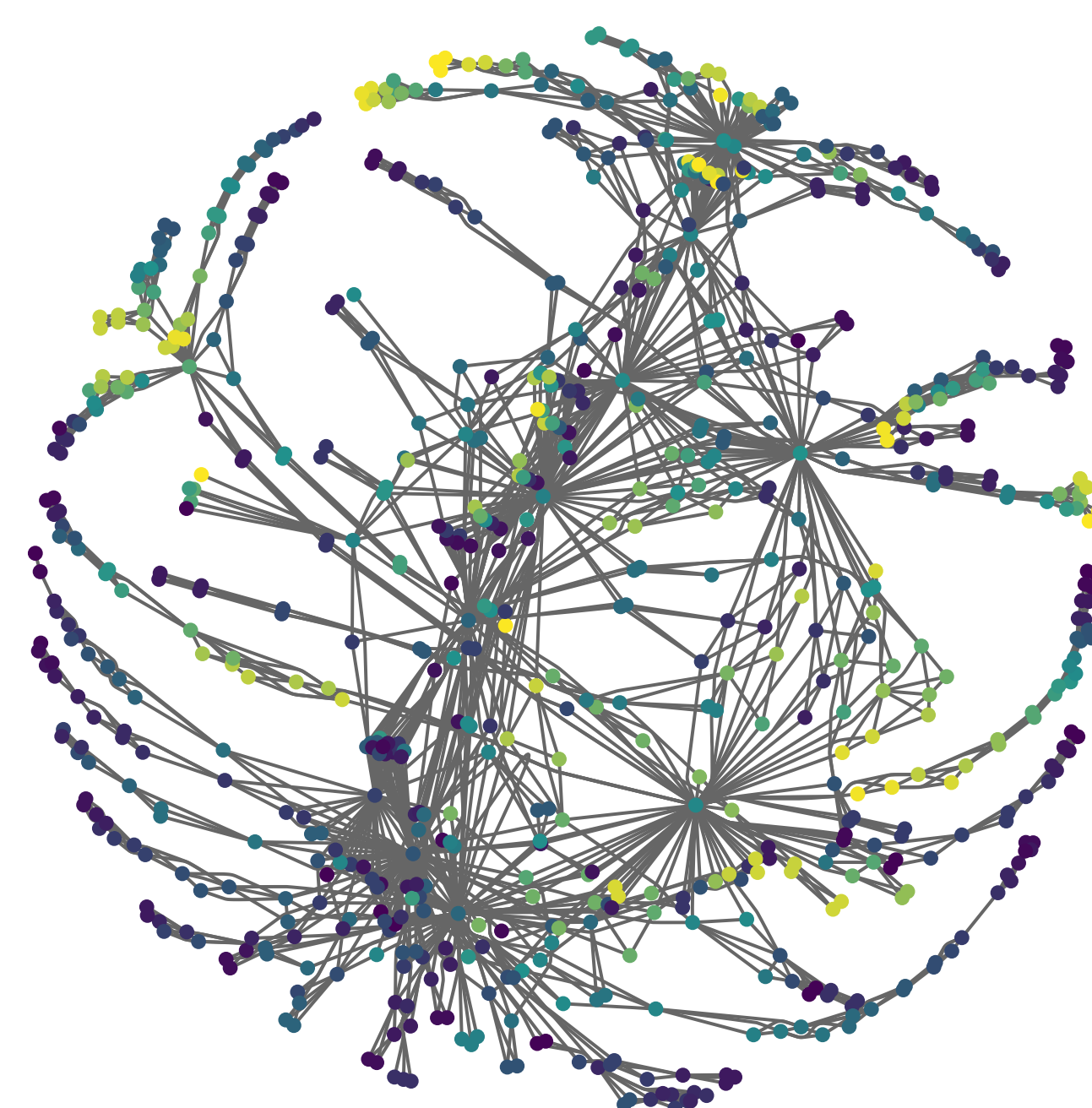


ステップ4:
クラスターを頂点で, 交わりを辺で表す



企業の特許取得パターンへの応用

平岡 裕章, Emerson G. Escobar, 伊神 満, Yasin Ozcan [arXiv:1909.00257]



結果

- 特許取得の時系列データを用いて, Mapperグラフで企業の技術空間を可視化した (左図).
- 特徴的な構造はフレアー.
- それらを定義し, 検出するアルゴリズムを提案した.
- フレアーは企業の業績指標と有意に相関していることが分かった.

(Emerson G. Escobar)

パーシステントホモロジーの体の選択問題

大林 一平, 吉脇 理雄 [arXiv:1911.11350]

背景

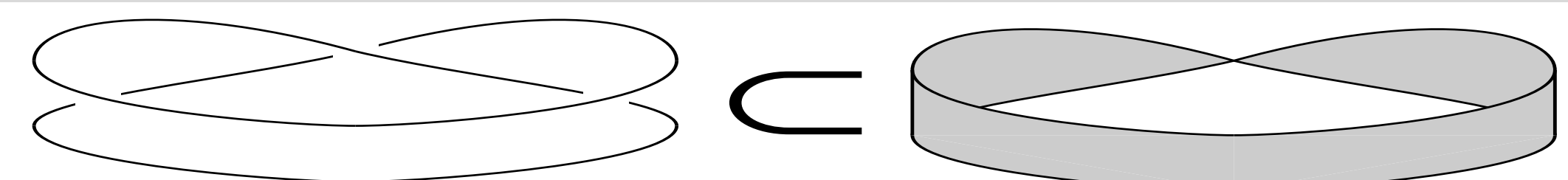
パーシステントホモロジーは図形の増大列 $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N$ に対して次の係数体Fのホモロジーベクトル空間の列を考える.

$$0 = H_q(X_0; F) \rightarrow H_q(X_1; F) \rightarrow \dots \rightarrow H_q(X_N; F)$$

普通Fとして $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ を使うがこれを変えたらどうなる?

Q: 実際に問題が生じるのか?

A: 安直にはクラインの壺で問題に(PDが変化). 以下の例は重要.



Q: じゃあこの問題が生じる条件は?

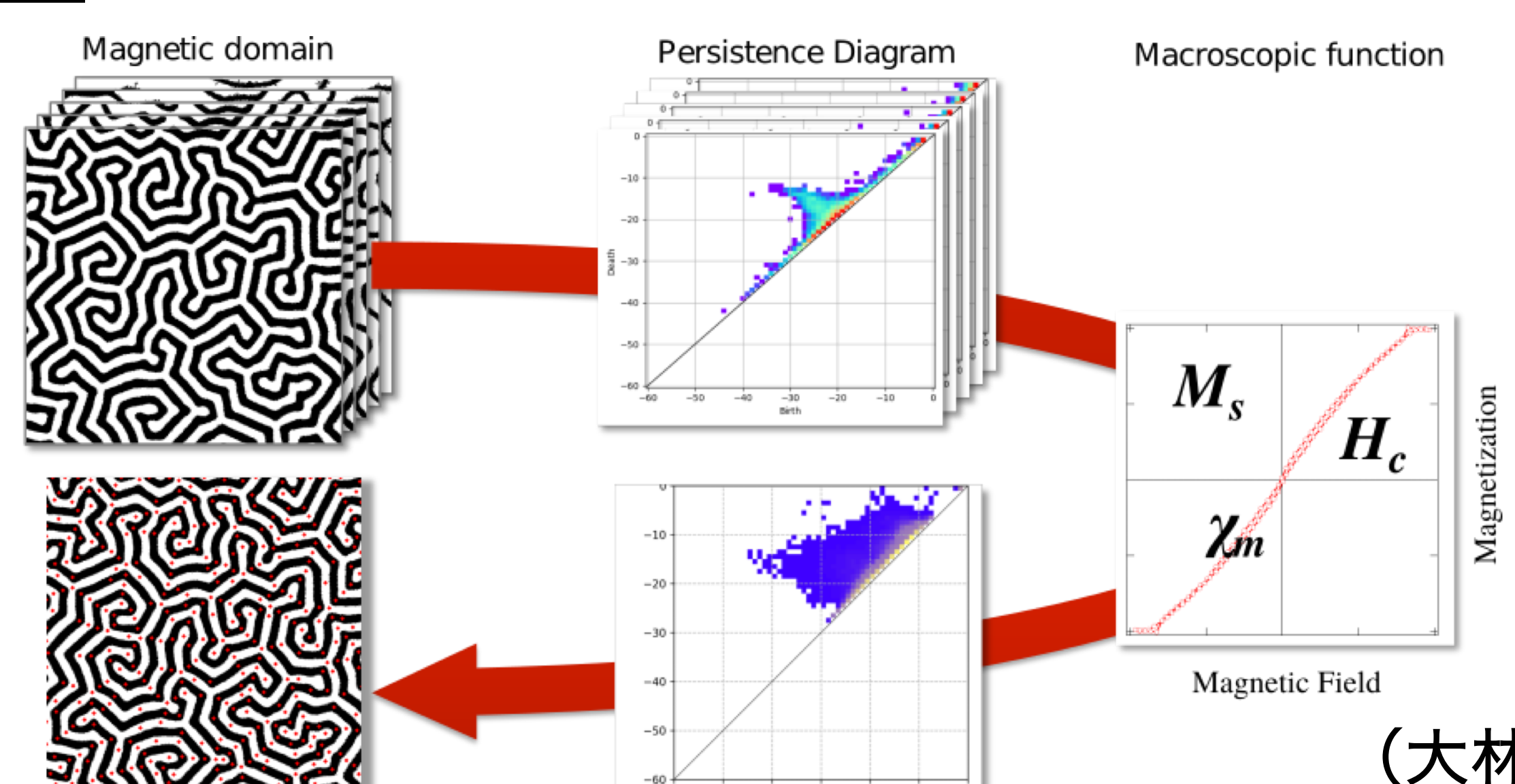
A: 相対ホモロジー群 $H_q(X_i, X_j; \mathbb{Z})$ が「free」かどうか分水嶺.

Q: この条件を効率的に判定することは可能?

A: 効率的なアルゴリズムが存在する! 既に実装済.

迷路状磁区構造におけるトポロジカル欠陥の可視化

山田 拓洋 et. al, 表面と真空 62 巻 (2019) p. 153-160



(大林 一平)