

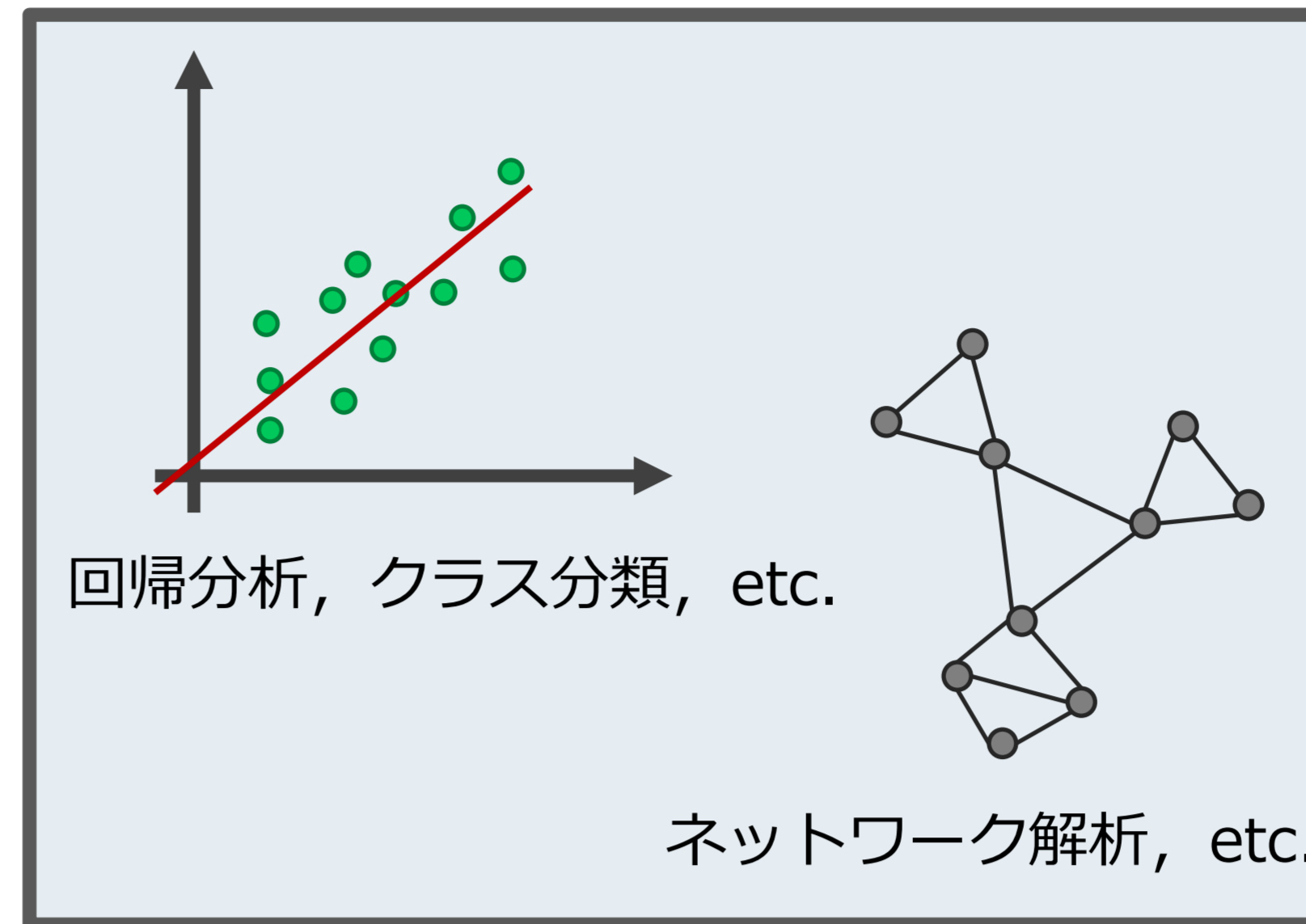
数理最適化（主に連続最適化）に関する研究

機械学習やデータマイニングから生じる最適化問題をうまく解き、実社会の問題解決に役立てたい

チームの強み：

- 大規模問題に対するランダム射影を用いた効率的解法
- 非凸最適化問題に対する理論保証つき解法
- 制約付き最適化問題に対する効率的解法

機械学習やデータマイニング



数理最適化問題
 $\min_x f(x)$
 s.t. $g_1(x) \leq 0,$
 $g_2(x) \leq 0,$
 ...
 解法研究 (例) :
 ● ランダム射影法
 ● 非平滑・非凸最適化法
 ● 制約付き最適化法
 チームの得意とするところ

多数制約付き線形計画問題のためのランダム射影 [Poirion, Lourenço, Takeda, Lin. Alg. App., 2023]

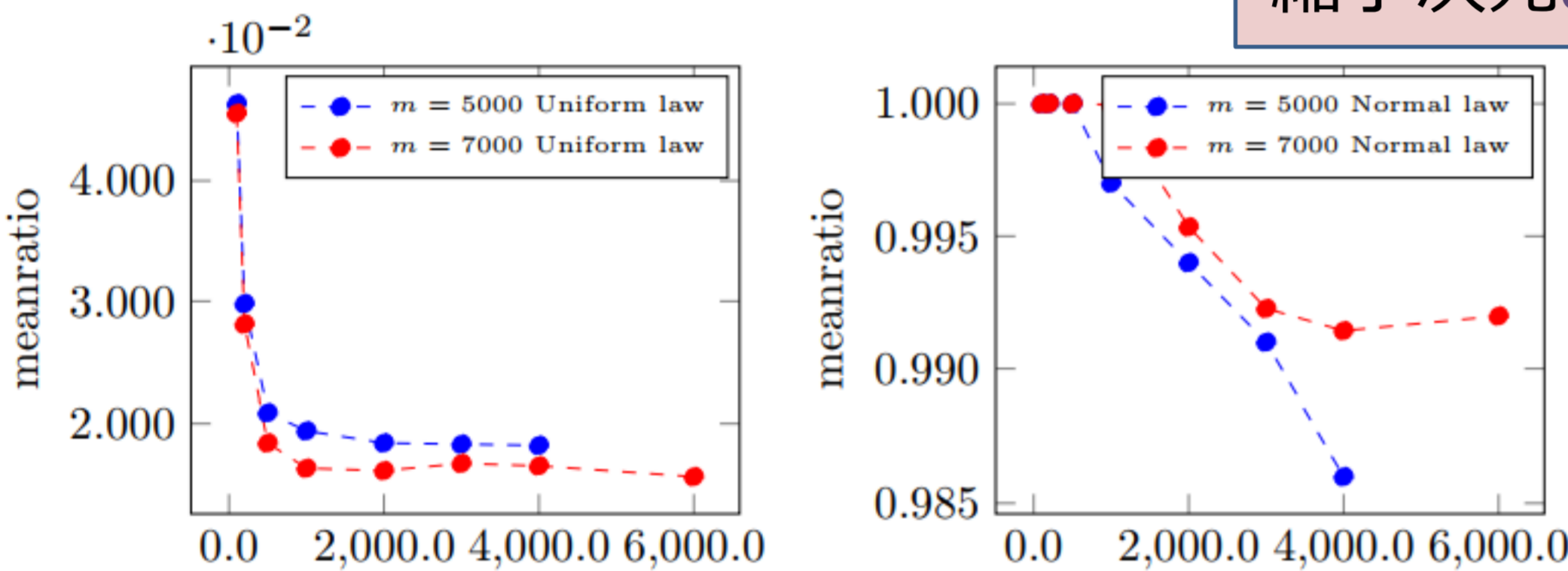
制約式の本数が多い問題 \mathcal{P} の代わりにランダム行列で制約式が圧縮された緩和問題 \mathcal{P}_S を解く。

- $S_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1/d)^2$
- $S \in \mathcal{R}^{d \times m}, d \ll m$

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min_x c^\top x \\ Ax \geq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1) \quad \mathcal{P}_S \begin{cases} \min_x c^\top x \\ SAx \geq Sb \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2)$$

$$v(\mathcal{P})(1 - \text{Error}(d)) \leq v(\mathcal{P}_S) \leq v(\mathcal{P})$$

最適値との差 $\text{Error}(d)$ と縮小次元 d の関係を導出



ランダム射影を利用した非凸2次最適化法 [Fuji, Poirion, Takeda, SIAM J Optim, 2022]

問題設定：非凸2次最適化問題

$$\mathcal{P} \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{x^\top Qx + c^\top x \mid Ax \leq b\},$$

ランダム射影 $\mathcal{P} +$ 凸化で
 変数の数が小 ($n \ll d$),
 かつ凸な問題に帰着

$$\mathcal{P}' \equiv \min_{u \in \mathbb{R}^d} \{u^\top F^+(PQP^\top)u + (Pc)^\top u \mid AP^\top u \leq b\}$$

F^+ : 半正定値錐への射影

効率的に解ける

不定値カーネルSVM

- データはmnistの「0」「1」画像
- 1,000訓練データ
- シンプソンカーネル

表1 \mathcal{P} achieved 66.70% training-accuracy and 53.00% test-accuracy

d	Training Accuracy (%)	Test Accuracy (%)
300	55.09 ± 14.40	53.43 ± 12.80
400	64.88 ± 15.64	62.80 ± 14.14
500	89.00 ± 12.61	83.30 ± 11.56
600	95.00 ± 0.85	90.23 ± 1.54
700	92.56 ± 1.60	86.53 ± 2.95
800	84.26 ± 3.09	76.60 ± 4.27
900	72.44 ± 3.20	60.83 ± 4.19
1000	66.96 ± 0.63	53.60 ± 0.78

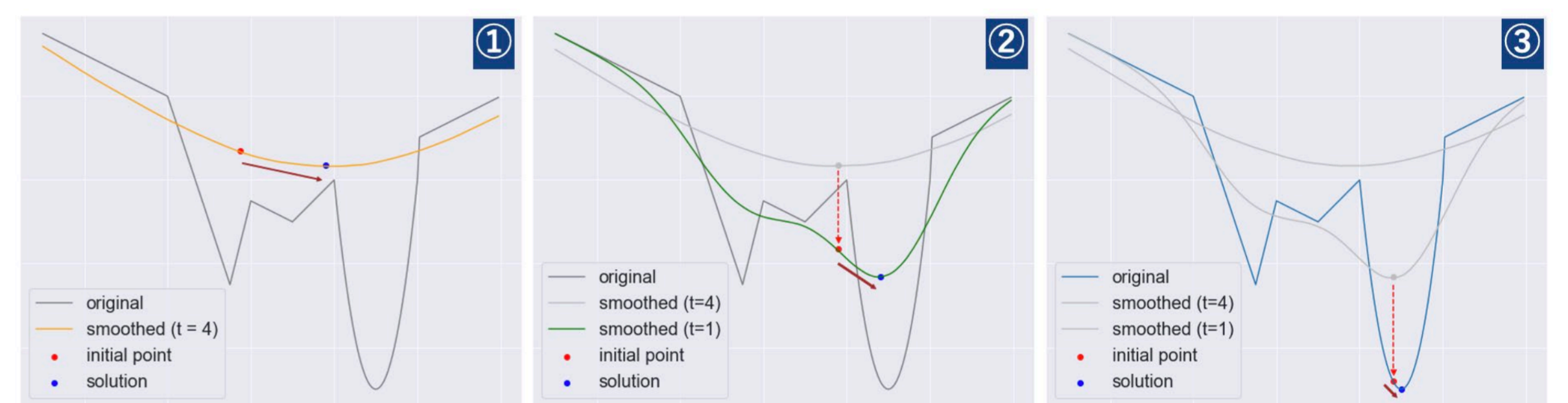
約半分に次元縮小してもよい性能

非凸最適化問題のよりよい解を目指した解法 [Iwakiri, Wang, Ito, Takeda, NeurIPS, 2022]

□ ガウシアンホモトピー (GH) 法

非凸最適化において、初期値の選択に依存せず、よい解を見つけることを目指した手法

- ①: 目的関数を平滑化して凸関数に変形し、最小化
- ②, ③: 平滑化パラメータ t を小さくしながら、解を更新



□ 既存の GH 法の問題点: 二重ループ構造

ループ1: 平滑化パラメータ t を更新

ループ2: t を固定したもとの、決定変数 x を更新

- ループ2で収束を待つ必要があり、GD と比べて非常に低速
- また、一般の非凸関数に対する収束レートの理論解析もなし

□ 本研究の貢献

- x に加えて t を決定変数と見なし、これらを同時に更新する一重ループの手法を提案

$$\begin{aligned} &\text{Sample } u_k \text{ from } \mathcal{N}(0, I_d) \\ &x_{k+1} = x_k - \beta \bar{G}_{x,u}, \quad \bar{G}_{x,u} = \begin{cases} \bar{g}_x(x_k, t_k; u_k) \text{ (determ.)} \\ \bar{G}_x(x_k, t_k; \xi_k, u_k), \xi_k \sim P \text{ (stoc.)} \end{cases} \\ &\text{Sample } v_k \text{ from } \mathcal{N}(0, I_d) \\ &t_{k+1} = \begin{cases} \gamma t_k \text{ (SLGH)} \\ \max\{\min\{t_k - \eta \bar{G}_{t,v}, \gamma t_k\}, \epsilon'\} \text{ (SLGH}_d) \end{cases}, \quad \bar{G}_{t,v} = \begin{cases} \bar{g}_t(x_k, t_k; v_k) \text{ (determ.)} \\ \bar{G}_t(x_k, t_k; \xi_k, v_k), \xi_k \sim P \text{ (stoc.)} \end{cases} \end{aligned}$$

- 理論解析を行い、停留点への収束を保証した上、収束レートが GD と同じオーダーであることを証明
- ブラックボックスな敵対的攻撃にて、GD を精度で上回り、かつ、既存の GH 法よりも高速なことを確認

提案手法の攻撃成功率が最も高い

Methods	Succ. rate	Avg. iters to 1st succ.	Avg. L_2 (succ.)	Avg. total loss
ZOSGD	88%	835 ± 1238	0.076 ± 0.085	27.70 ± 74.80
ZOAdaMM	85%	3335 ± 2634	0.050 ± 0.055	20.24 ± 62.48
ZOSLGH _d	65%	6789 ± 1901	0.249 ± 0.159	41.45 ± 76.04
ZOSLGH _d ($\gamma = 0.999$)	93%	4979 ± 756	0.246 ± 0.178	14.26 ± 54.61
ZOSLGH _d ($\gamma = 0.999$)	92%	4436 ± 805	0.150 ± 0.084	16.49 ± 58.69

既存の GH 法は提案手法より低速

リーマン多様体上の制約付き最適化問題に対する逐次2次最適化 [Obara, Okuno, Takeda, SIAM J Optim, 2022]

考える問題：リーマン多様体上の制約付き最適化問題 (RNLO)

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(x) \\ &x \in \mathcal{M} \\ &\text{subject to } g_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, m\}, \\ &h_j(x) = 0, \quad j \in \mathcal{E} := \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

\mathcal{M} : リーマン多様体

ユークリッド空間を一般化した位相空間

f, g_i, h_j : \mathcal{M} 上で定義された連続的微分可能な実数値関数

RNLOの背景

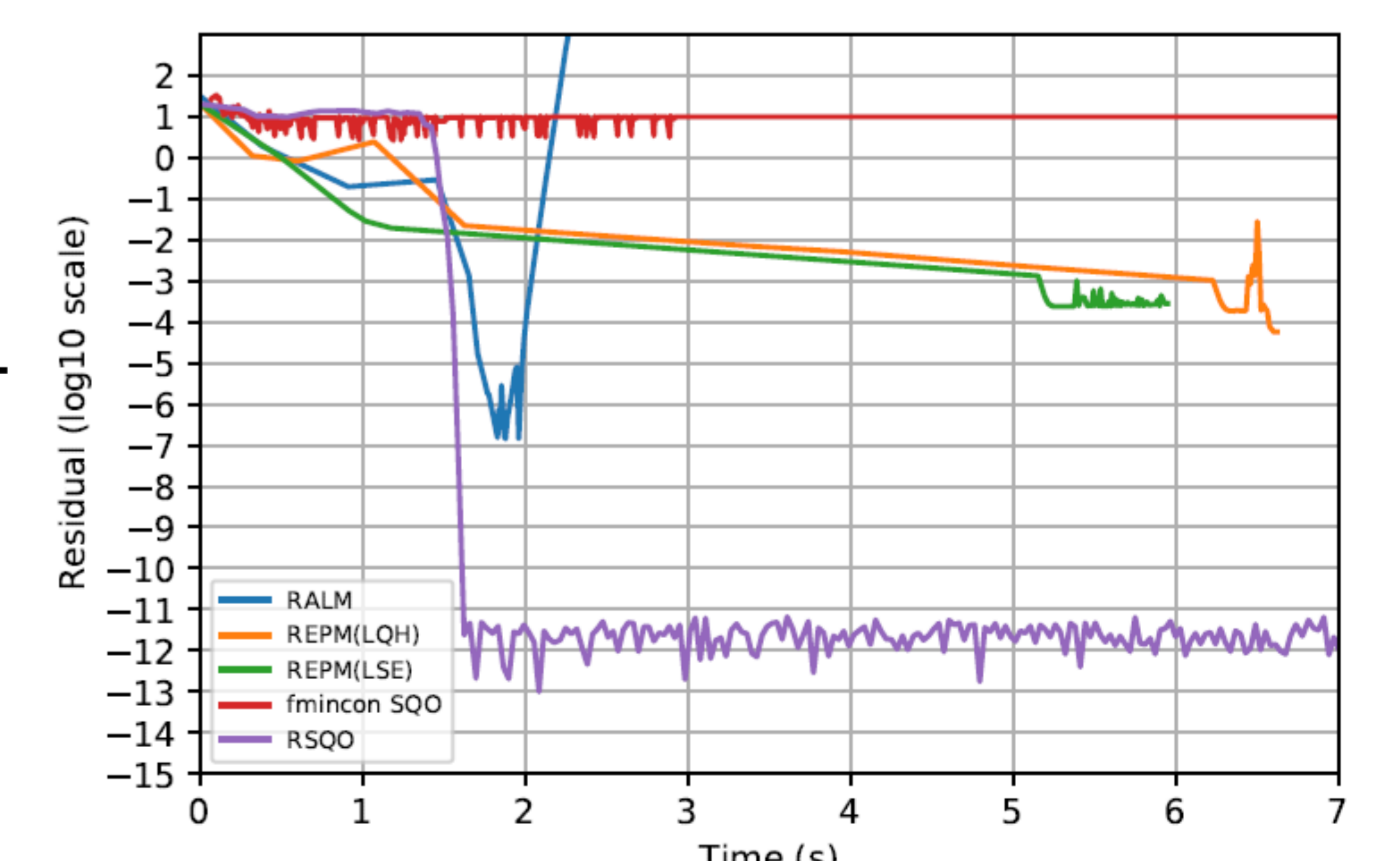
1. 無制約RNLOの研究の成熟を受けて、この数年で理論面や応用面の研究は活発化
2. 制御における応用例：安定なシステム同定においてRNLOへのモデリングが有効であることが示された

本研究の貢献

1. 新手法の提案：元問題の近似問題である接空間上で定義された制約付き2次最適化問題を繰り返し解いて点列を生成
2. 大域的収束性と局所2次収束性を証明（2種の収束性保証のある手法はRNLOに対しては初めて）

数値実験

低ランク非負行列補完などを対象に、時間（横軸）、最適性残差（縦軸対数目盛）で提案手法（紫）と他の数種の手法を比較。精度に関して大きな優位性を確認



値が小さいほど解に近い